ECON 2200, Maksimering - handout

Kjell Arne Brekke

February 1, 2011

1 Maksimering;

Definisjon

Om f er definert i et område D sier vi c er et maksimumspunkt i D dersom $f(c) \geq f(x)$ for alle x i D, tilsvarende er c et minimumspunkt om $f(c) \leq f(x)$ for alle x i D.

Eksempel, Funksjonen

$$f(x) = x^2$$

har den egenskapen at

$$f(x) = x^2 \geq 0 \text{ for alle } x \text{ (området } D \text{ kan nå være hele tallinja)}$$

samtidig vet vi at $0^2 = 0$, så om vi velger $c = 0$ så er $f(c) = 0$.

Oppgave 1 *Bruk definisjonen ovenfor og sjekk om $c = 0$ tilfredsstille betingelsene for et maksimumspunkt eller et minimumspunkt?*

Førsteordensbetingelser

Som påpekt på forelesningen er funksjonene flate på toppen, dette vil karakterisere maksimum og minimumspunkt. Formelt sier vi det på denne måten:

Anta f er deriverbar på I, og at $c \in I$ er i det indre av intervallet. En **nødvendig** betingelse for at c skal være et maksimum eller minimumspunkt er da at

$$f'(c) = 0.$$

Ligningen kaller vi førsteordensbetingelsen, og punktene som tilfredsstille dem kaller vi stasjonærpunkter.

Eksempel,

En produsent selger produktet til en pris 100 kroner per kilo og kostnadene er x^2, der x er bedriftens kvantum, hvor mye den produserer. Den totale profitten er da

$$\pi(x) = 100x - x^2 \text{ for } x \geq 0$$

Læreboka bruker c som stasjonærpunktet, men i økonomi er det vanligere å sette en stjerne på variabelen. Så om $\pi(x)$ er profitten om bedriften produserer et vilkårlig antall x, så lar vi x^*være det spesifikke antallet som maksimerer profitten.

Oppgave 2 *Sett opp førsteordensbetingelsen for profittmaksimering og finn stasjonærpunktet. Du skal skrive opp ligningen for*

$$\pi'(x^*) = 0$$

for den gitte profittfunksjonen og finne den verdien av x^* som løser ligningen.

Andreordensbetingelser

Vi husker fra sist at smilemunnen ($f''(x) > 0$) er flat på bunnen mens surmunnen ($f''(x) > 0$) er flat på toppen. Siden vi ønsker å maksimere profitten vil vi være sikker på at den er flat på toppen, altså at profitten er konkav.

Oppgave 3 *Sjekk om den oppgitte profittfunksjonen er konkav (sur) eller konveks (bli).*

Hva er en løsning?

Ovenfor løste vi profittmaksimeringen når prisen var 100. Hva om prisen er 97 eller 312? Eller om kostnadene er $2x^2$ eller kanskje x^3? Vi ønsker å slippe å gjøre regnestykket på nytt hver gang, så vi sier nå at prisen er p, og at kostnadene er en funksjon $c(x)$. Profitten blir

$$\pi(x) = px - c(x)$$

gir førsteordensbetingelse

$$p - c'(x^*) = 0$$

eller

$$p = c'(x^*)$$

Hva gjør vi så?

Vi gjør ikke noe mer, vi er i mål, vi har funnet løsningen! Ligningen $p = c'(x^*)$ er imidlertid noe vi kan tolke som økonomer. Om dette er en god beskrivelse av det som faktisk foregår i økonomien så betyr det at når du går i butikken og kjøper en vare så betaler du akkurat det det kostet å lage den (pluss andre kostnader til transport, butikkens kostnader etc...). Produsenten tjener altså ingenting på den enheten. Dette er en mye mer spennende påstand enn at det er optimalt for Hønserud gård å produsere 3484 egg om dagen.

Oppgave 4 *I eksempelet ovenfor er tre variable m, p og x^*. Dette er en modell for hvordan konsumenten oppfører seg (maksimerer nytten). Hvilke variable forklarer modellen (endogene) og hvilke blir tatt for gitt (endogene)? Er svaret vi kom fram til av formen*

$$\textit{Endogen variabel} = \textit{Et uttrykk med bare eksogene variable?}$$

Et eksempel til: En konsument har en inntekt lik m han kjøper x enheter kaffe i måneden til en pris p per enhet. Vi postulerer at nytten til konsumenten er $U(x) = v(x) + m - px$ og han ønsker å maksimere nytten. Førsteordensbetingelsen er da

$$U'(x^*) = v'(x^*) - p = 0$$

eller

$$p = v'(x^*)$$

og vi er strålende fornøyd med dette som løsning på problemet for det forteller oss noe interessant: Nytten av den siste koppen kaffe $v'(x^*)$ er lik prisen.

1.1 Deriverbar og Kontinuitet

Ovenfor brukte jeg ordet "deriverbar". Hva er det?

La oss ta funksjonen

$$f(x) = |x|$$

Jeg minner om at $|x|$ er absoluttverdien. Om x er et positivt tall er absoluttveriden tallet selv, altså $f(x) = x$ når $x \geq 0$. Om x er negativt får vi absoluttverdien ved å ta bort minustegnet, f.eks. er $|-3| = 3$ som vi også kan skrive som at $|-3| = 3 = -(-3)$. Det betyr at $f(x) = -x$ når $x \leq 0$. Dette samenfatter vi slik:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Vi kan så prøve å derivere funksjonen først for $x \geq 0$: da er $f(x) = x$ og $f'(x) = 1$. Når $x \leq 0$: da er $f(x) = -x$ og $f'(x) = -1$. Hva er så den deriverte for $x = 0$. Vi har to svar: 1 og -1. Dette er fordi stigningstallet til funksjonen når $x = 0$ blir ulikt om vi går til høyre enn om vi går til venstre. Vi sier da at funksjonen ikke er **deriverbar** i punktet $x = 0$. Merk også at

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

så funksjonen $f'(x)$ gjør et hopp i punktet $x = 0$, den henger ikke sammen som en glatt kurve, og vi si at da at funksjonen ikke er **kontinuerlig** i punktet $x = 0$.

Oppgave 5 *Tegn $f(x)$ og $f'(x)$ i et diagram. Figuren vil vise at funksjonen har et minimum, bestem for hvilken x funksjonen når minimum. Er førsteordensbetingelsen tilfredsstilt i minimumspunktet?*